1 KRUŽNICE A KRUH

Již ve starém Egyptě kolem roku 1500 př. n. l. se lidé snažili vypočítat obsahy a obvody kruhu a kružnice, aby zjistili výměru svých pozemků.

Některé úlohy starověku týkající se kruhu, jsou známé jako eukleidovsky neřešitelné. Eukleidovská konstrukce znamená konstrukce pomocí kružítka a pravítka. Takové úlohy jsou například Kvadratura kruhu nebo Rektifikace kružnice.

V letech 287 – 212 př. n. l. žil Archimédes ze Syrakus, který byl považován za nejvýznamnější starověkého vědce. Údajně jeho poslední věta před tím, než byl zavražděn vojáky, byla: „Nerušte mi mé kruhy."

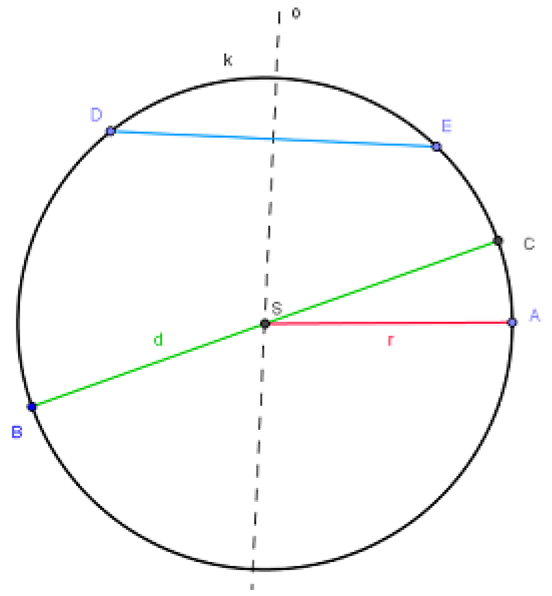
V lidské historii se tedy často setkáváme s pojmem kružnice a kruh a ani nyní tomu není jinak. Dnes a denně se s kružnicemi a kruhy setkáváme. Když se podíváte kolem sebe, téměř všude vidíte nějaké kružnice. Středový kruh na fotbalovém hřišti nebo kruhový oblouk u pokutového území, kruhové dopravní značky, kola u bicyklů nebo některé oblouky u mostních pilířů.

1.1 Kružnice

Definice: Kružnice je množina bodů, které mají od daného bodu (středu) stejnou vzdálenost (poloměr).

Poloměr kružnice je vzdálenost středu kružnice od libovolného bodu na kružnici. Poloměr značíme malým písmenem r. **Průměr** je úsečka spojující dva body na kružnici a zároveň procházející středem kružnice. Průměr značíme malým písmenem d a jeho velikost se rovná dvojnásobku velikosti poloměru. Úsečka spojující dva libovolné body na kružnici se nazývá **tětiva** kružnice. Osa každé tětivy prochází středem kružnice.

Délka neboli obvod kružnice je dána rovnicí $o = 2 \cdot \pi \cdot r$



Obrázek 1 – kružnice

1.1.1 Vzájemná poloha přímky a kružnice

Pro přehlednější zápis si označíme vzdálenost přímky od středu kružnice jako *v*.

1. **Přímka prochází vně kružnice**

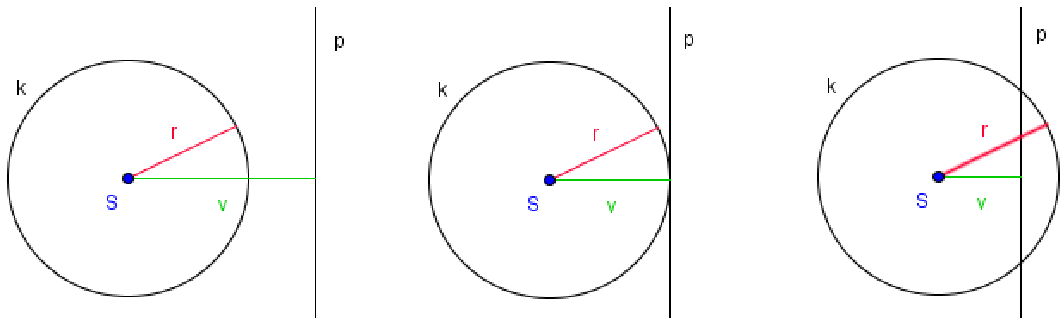
   Prochází-li přímka vně kružnice, pak její vzdálenost od středu je vždy větší než poloměr kružnice. $v > r$

2. **Přímka je tečnou kružnice**

   Je-li přímka tečnou kružnice, pak její vzdálenost od středu je vždy stejná jako poloměr kružnice. $v = r$

3. **Přímka je sečna kružnice**

   Je-li přímka sečnou kružnice, pak její vzdálenost od středu je vždy menší než poloměr kružnice. $v < r$

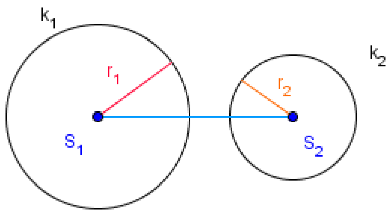


Obrázek 2 - vzájemná poloha přímky a kružnice

1.1.2 Vzájemná poloha dvou kružnic

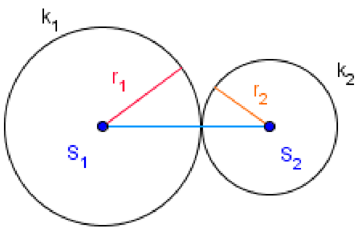
1. **Kružnice leží vně druhé**

   Vzdálenost středů je větší než součet velikostí poloměrů. $|S_1S_2| > r_1 + r_2$



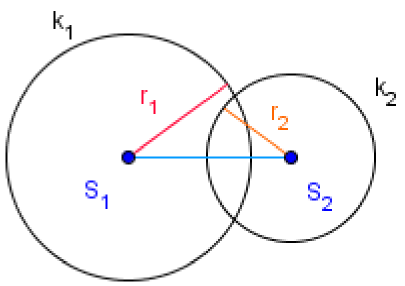
2. **Kružnice mají vnější dotyk**

   Vzdálenost středů je rovna součtu velikostí poloměrů. $|S_1S_2| = r_1 + r_2$



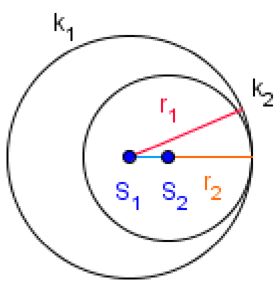
3. **Kružnice mají dva společné body**

   Vzdálenost středů je větší než rozdíl velikostí poloměrů a zároveň je menší než součet velikostí poloměrů. $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$



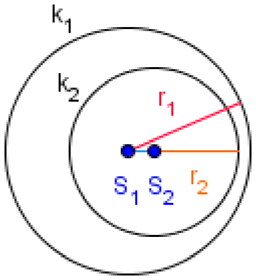
4. **Kružnice mají vnitřní dotyk**

   Vzdálenost středů je rovna rozdílu velikostí poloměrů. $|S_1S_2| = r_1 - r_2$



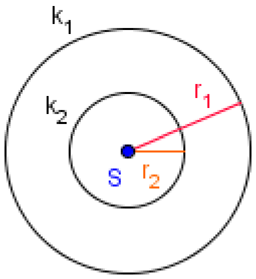
5. **Kružnice leží uvnitř druhé**

Vzdálenost středů je menší než rozdíl velikostí poloměrů. $|S_1S_2| < r_1 - r_2$



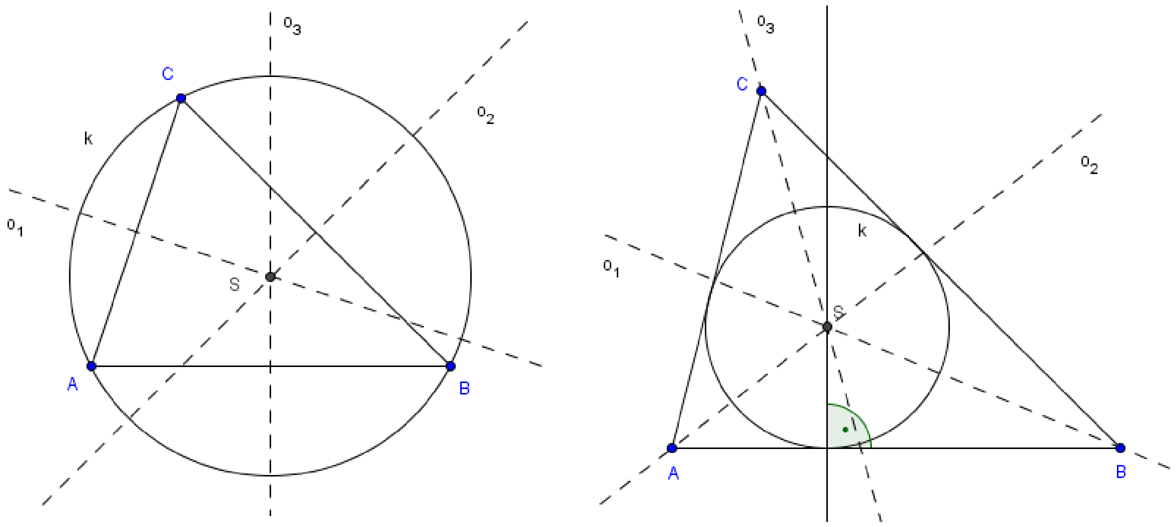
6. **Soustředné kružnice**

Kružnice mají společný střed a různé poloměry.



1.1.3 Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Pokud konstruujeme kružnici opsanou a kružnici vepsanou trojúhelníku, potom je pro nás nejdůležitější najít střed kružnice. Při konstrukci **kružnice opsané**, musíme nejprve narýsovat **osy stran** trojúhelníka. Jejich průsečík je středem kružnice opsané. Poloměr kružnice je vzdálenost získaného středu a vrcholu trojúhelníka. Pokud chceme zkonstruovat **kružnici vepsanou** trojúhelníku, potom musíme jako první narýsovat **osy vnitřních úhlů** trojúhelníku. Jejich průsečík je středem kružnice vepsané. Poloměr kružnice je vzdálenost získaného středu k patě kolmice spuštěné z tohoto středu na stranu trojúhelníka.



Obrázek 3 - kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

1.2 KRUH

Definice: Kruh je množina všech bodů, které mají od daného bodu (středu) vzdálenost rovnou poloměru, nebo menší než poloměr. Body, jejichž vzdálenost od středu je rovna poloměru, leží na obvodu kruhu. Body, jejichž vzdálenost od středu je menší než poloměr, leží uvnitř kruhu.

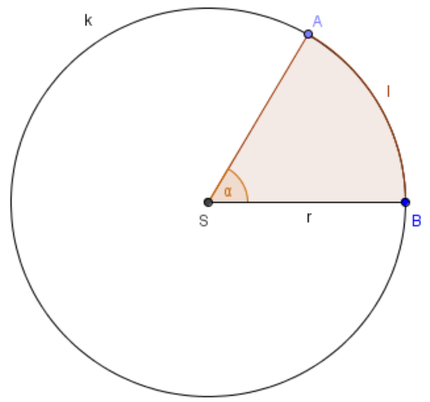
Obsah kruhu vypočteme $S = \pi \cdot r^2$

Délku kruhového oblouku vypočteme $l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$

1.2.1 Kruhová výseč a úseč

Průnik kruhu a úhlu s vrcholem ve středu kruhu se nazývá **kruhová výseč**.

Obsah kruhové výseče spočítáme $S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$



Obrázek 4 - kruhová výseč

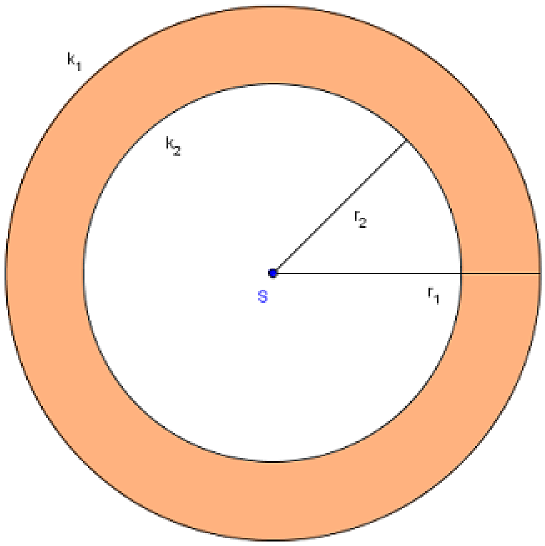
Průnik kruhu a poloroviny, jejíž hraniční přímka má od středu kruhu vzdálenost menší než jeho poloměr se nazývá **kruhová úseč**.

Obsah kruhové úseče se rovná rozdílu obsahu kruhové výseče a obsahu trojúhelníka *ABS*.

1.2.2 Mezikruží

Mezikruží je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu S vzdálenost alespoň r_1 a nejvýše r_2 .

Obsah mezikruží vypočítáme $S = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)$



Obrázek 5 – mezikruží

2 Příklady

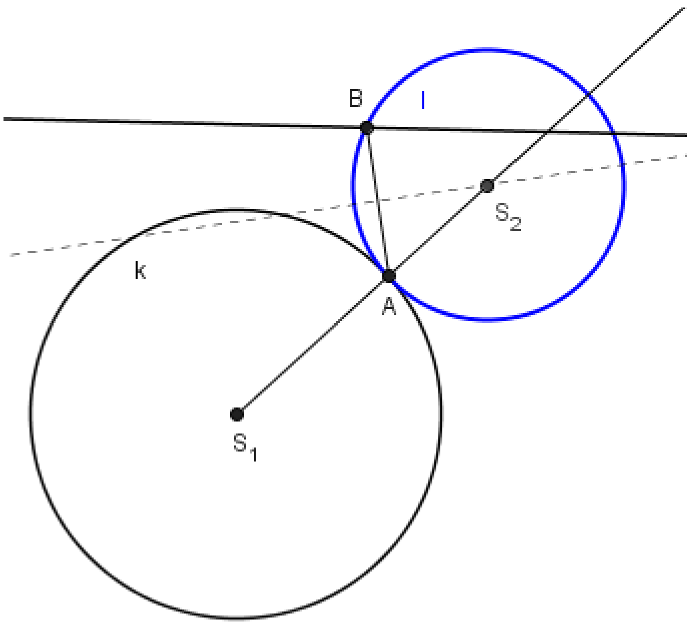
Zadání: Je dána kružnice *k*, její vnější přímka *p*, bod *A*, který leží na kružnici *k*, a bod *B*, který leží na přímce *p*. Sestrojte kružnici *l*, která se dotýká kružnice *k* v bodě *A* a prochází bodem *B*.

Rozbor: Známe kružnici *k* a bod *A* ležící na ní. Známe přímku *p* a bod *B* ležící na ní. Pokud máme sestrojit kružnici, která prochází oběma body, pak musíme nejprve najít její střed. Ten bude tvořit společně s body *A* a *B* vrcholy rovnoramenného trojúhelníku se základnou *AB*. Proto bod *S* bude ležet na ose úsečky *AB*.

Jelikož se obě kružnice budou dotýkat pouze v bodě *A*, potom budou středy obou kružnic ležet na přímce procházející bodem *A*.

Střed hledané kružnice bude na průsečíku osy úsečky a přímky procházející středem zadané kružnice a bodem *A*.

Grafické řešení:



Počet řešení: Úloha má jedno řešení.

1. Úsečka *AB* má délku 8cm. Sestrojte čtyři pravoúhlé trojúhelníky tak, aby úsečka *AB* byla jejich přeponou.

2. Je dána kružnice $k(S; r = 45mm)$ a přímka *p* ve vzdálenosti $3cm$ od bodu *S*. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r = 20mm$, které se dotýkají přímky *p* a s kružnicí *k* mají

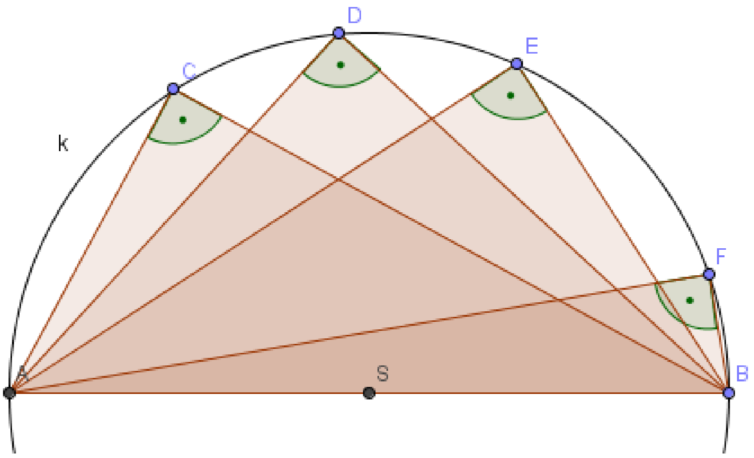
vnější dotyk. Proveďte rozbor, zapište postup konstrukce, proveďte ji a určete počet řešení.

3. Je dána přímka *p* a polopřímka *AB*, která má počátek *A* na přímce *p* a svírá s ní úhel o velikosti 75°. Sestrojte všechny kružnice s poloměrem $r = 2cm$, které se dotýkají přímky *p* i polopřímky *AB*.
4. Je dána kružnice $k(S; r = 5{,}5cm)$ a její sečna *s*, jejíž vzdálenost od středu *S* je 1,5cm. Sestrojte všechny kružnice o poloměru $r_1 = 2cm$, které se dotýkají sečny *s* a mají s kružnicí *k* vnitřní dotyk.
5. Sestrojte obdélník *ABCD* se stranami délek $a = 5cm$, $b = 9cm$. Bod *P* je středem strany *BC*. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek *AB*, *AP* a strany *BC* obdélníku.
6. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno $a = 5cm$, $b = 3{,}5cm$ a poloměr kružnice opsané $r = 4cm$.
7. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC*, v němž výška k přeponě dělí přeponu na dva úseky $c_1 = 3{,}2cm$ a $c_2 = 4{,}1cm$.
8. Jsou dány přímka *p* a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$. Veďte přímku rovnoběžnou s přímkou *p* tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.
9. Čtverci *ABCD* se stranou délky 10*cm* je opsána a vepsána kružnice. Tyto kružnice jsou hraniční kružnice mezikruží. Vypočítejte obsah tohoto mezikruží.
10. Narýsujte kruhovou výseč, která je jednou šestinou kruhu s poloměrem 4cm a vepište jí kružnici.

3 Řešení

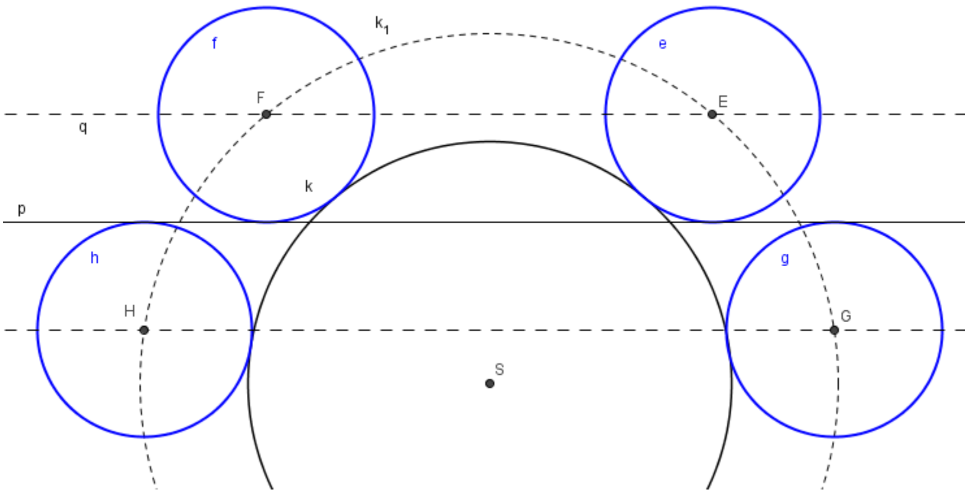
Příklad 1:

1. $AB; |AB| = 8cm$
2. $S; S \in AB \wedge |AS| = |BS|$
3. $k; k(S; |AS|)$
4. $C; C \in k \cap p$
5. ΔABC



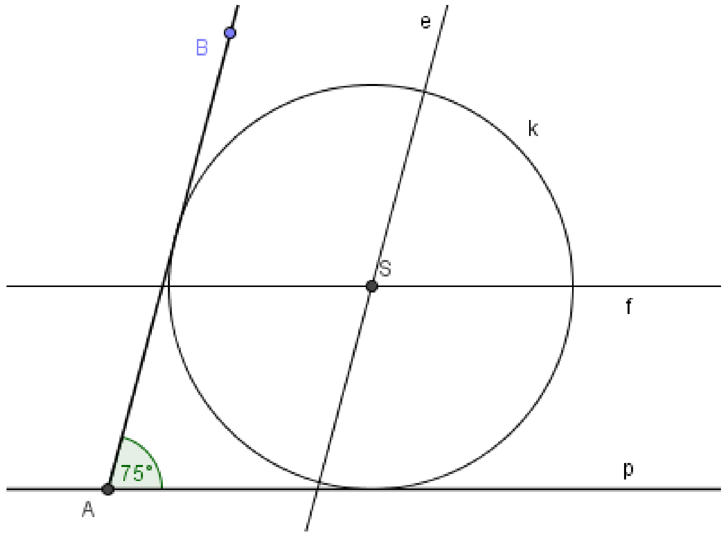
Příklad 2:

1. $q; q \parallel p \wedge |pq| = 2cm$
2. $k_1; k_1(S; 6{,}5cm)$
3. $E; E \in k_1 \cap q$
4. $e; e(E; 2cm)$
5. Úloha má 4 řešení



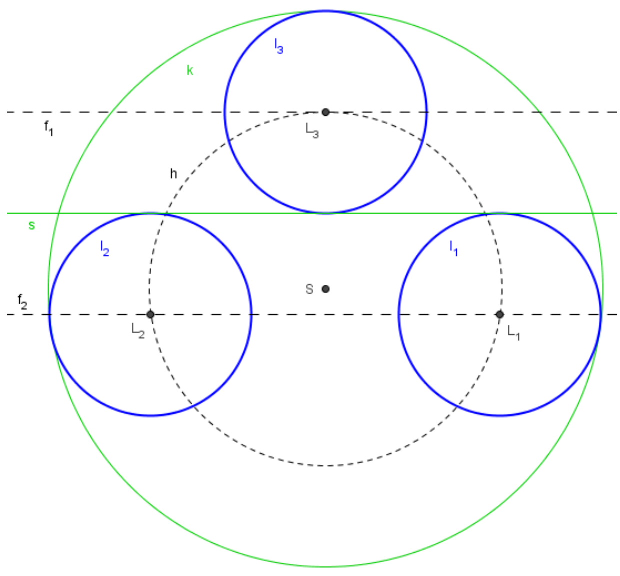
Příklad 3:

1. $A; A \in p$
2. $\angle pAB; \angle|pAB| = 75°$
3. $e; e \parallel p \wedge |eq| = 2cm$
4. $f; f \parallel AB \wedge |fAB| = 2cm$
5. $S; S \in e \cap f$
6. $k; k(S;2cm)$
7. Úloha má 2 řešení



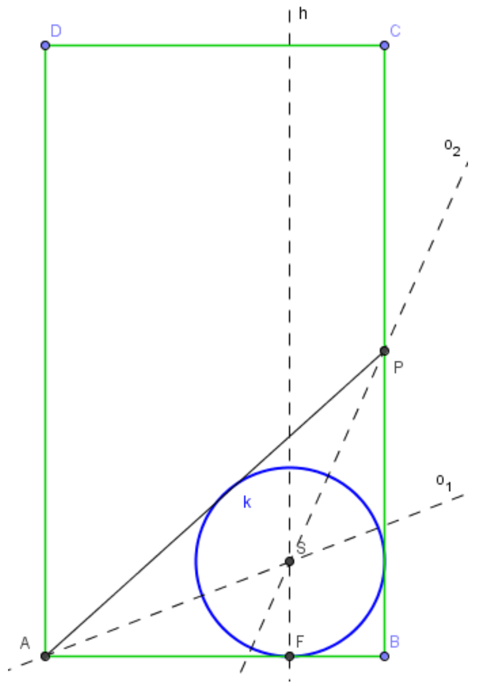
Příklad 4:

1. $k; k(S;5,5cm)$
2. $s; |sS| = 1,5cm$
3. $h; h(S;3,5cm)$
4. $f; f \parallel s \wedge |fs| = 2cm$
5. $L_1; L_1 \in h \cap f$
6. $l_1; l_1(L_1;2cm)$
7. Úloha má 3 řešení



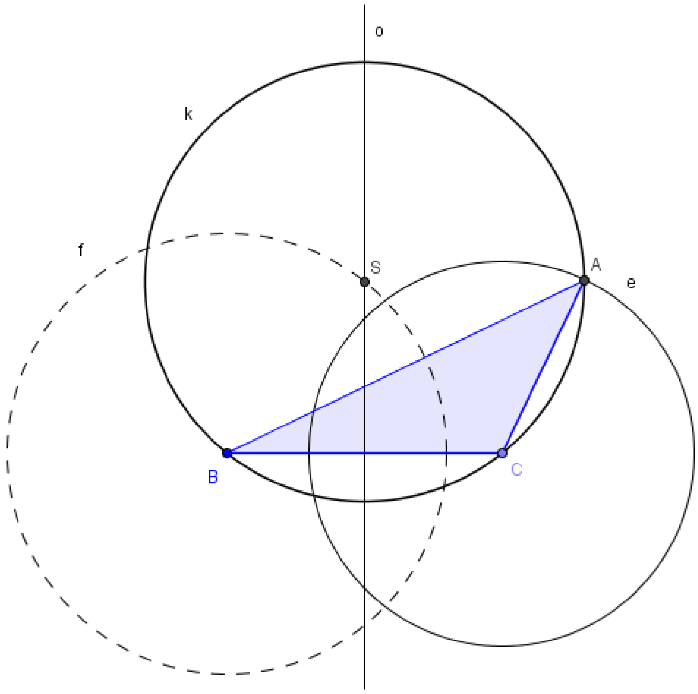
Příklad 5:

1. $ABCD$
2. $P; P \in BC \wedge |BP| = |CP|$
3. $o_1; o_1$ osa $\angle BAP$
4. $o_2; o_2$ osa $\angle APB$
5. $S; S \in o_1 \cap o_2$
6. $h; h \parallel BP \wedge S \in h$
7. $F; F \in h \cap AB$
8. $k; k(S; |SF|)$



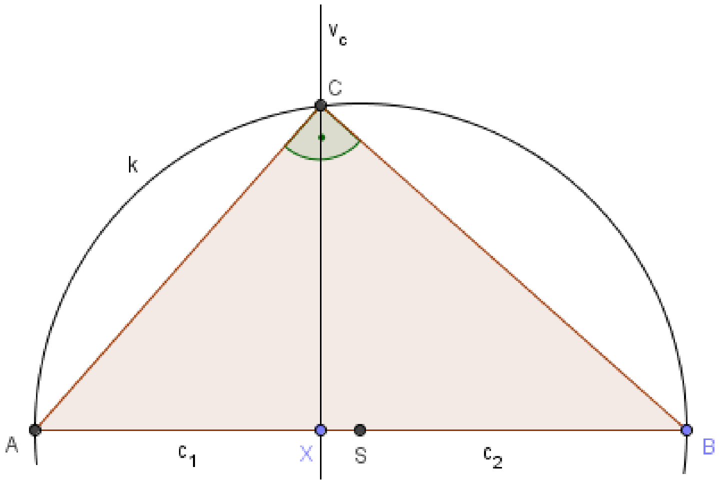
Příklad 6:

1. $BC; |BC| = 5cm$
2. $o; o \perp BC \wedge |Bo| = |Co|$
3. $f; f(B;4cm)$
4. $S; S \in f \cap o$
5. $k; k(S;4cm)$
6. $e; e(C;3,5cm)$
7. $A; A \in k \cap e$
8. ΔABC



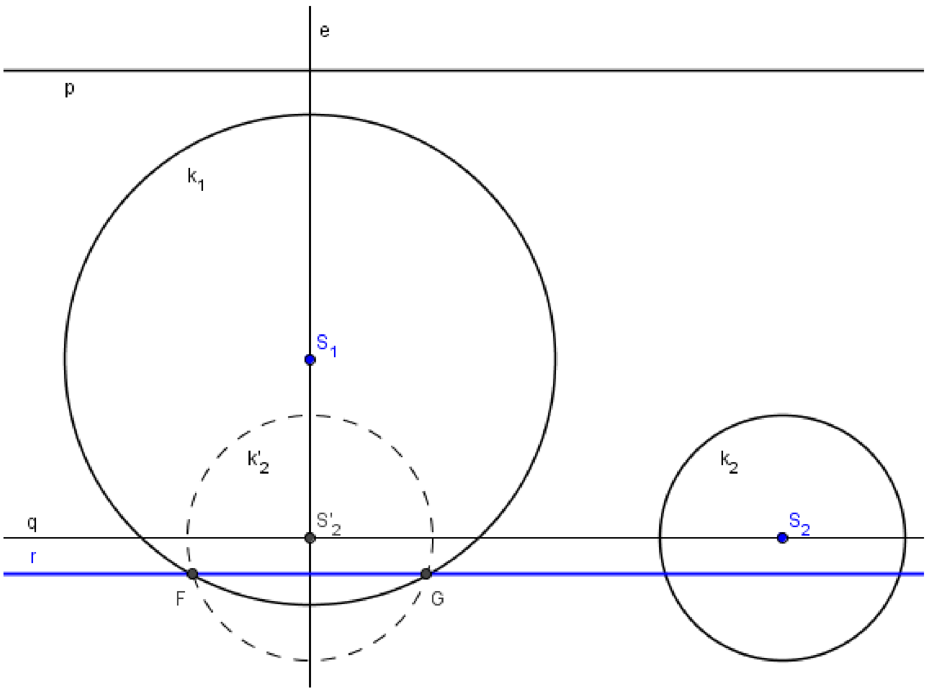
Příklad 7:

1. $AB; |AB| = 7,3cm$
2. $X; X \in AB \wedge |XA| = 3,2cm$
3. $v_c; v_c \perp AB \wedge X \in v_c$
4. $S; S \in AB \wedge |SA| = |SB|$
5. $k; k(S; |AS|)$
6. $C; C \in k \cap v_c$
7. ΔABC



Příklad 8:

1. $q; q \parallel p \wedge S_2 \in q$
2. $e; e \perp q \wedge S_1 \in e$
3. $S_2'; S_2' \in q \cap e$
4. $k_2'; k_2'(S_2'; |r_2|)$
5. $F, G; F, G \in k_1 \cap k_2'$
6. $r; r \ni FG$



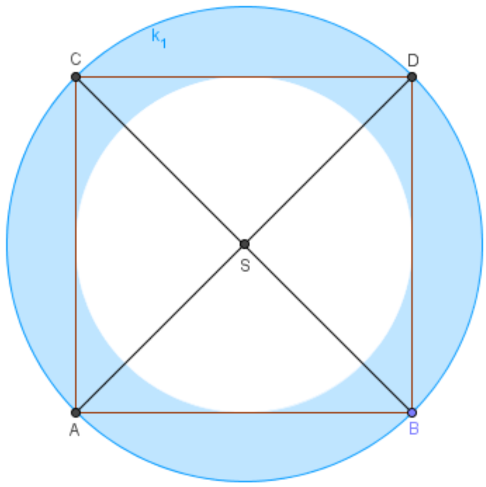
Příklad 9:

$$2.r_1^2 = a^2 + a^2$$
$$2r_1^2 = 200$$
$$2r_1 = 14{,}14$$
$$r_1 = 7{,}07cm$$

$$S_1 = \pi.r_1^2$$
$$S_1 = 3{,}14.50$$
$$S_1 = 157{,}08cm^2$$

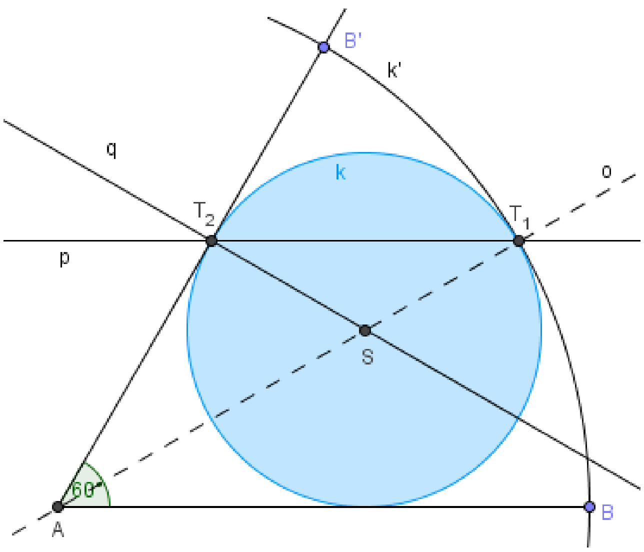
$$S_2 = \pi.r_2^2$$
$$S_2 = 3{,}14.25$$
$$S_2 = 78{,}54cm^2$$

$$S = S_1 - S_2$$
$$S = 157{,}08 - 78{,}54$$
$$S = 78{,}54cm^2$$



Příklad 10:

1. $AB; |AB| = 4cm$
2. $\angle BAB'; |\angle BAB'| = 60°$
3. $k'; k'(A; |AB|)$
4. $o; o$ osa $\angle BAB'$
5. $T_1; T_1 \in o \cap k'$
6. $p; p \parallel AB \wedge T_1 \in p$
7. $T_2; T_2 \in p \cap AB'$
8. $q; q \perp AB' \wedge T_2 \in q$
9. $S; S \in q \cap o$
10. $k; k(S; |ST_1|)$


B'
k'
q
k
o
T2
T1
p
S
60°
A
B