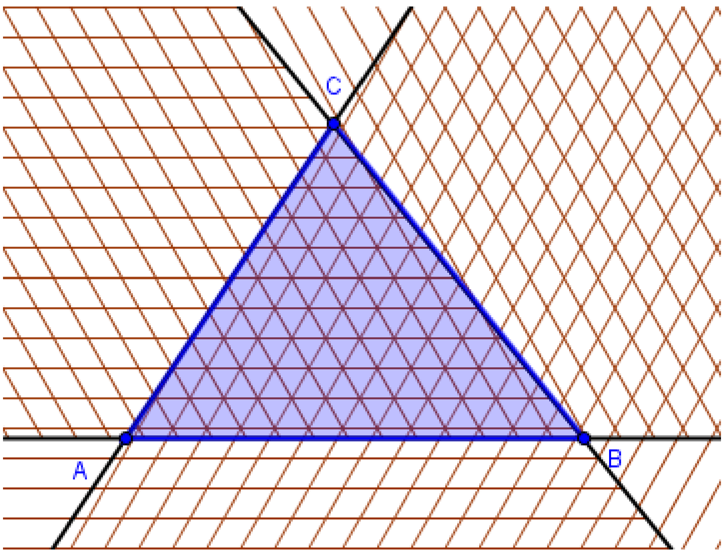
1 MNOHOÚHELNÍKY

Mnohoúhelník je část roviny, která je ohraničena uzavřenou lomenou čarou, která sama sebe neprotíná. Skládá-li se hranice mnohoúhelníku z *n* úseček, nazývá se mnohoúhelník *n*-úhelníkem**.** Každý *n*-úhelník má *n* vrcholů, *n* stran a *n* vnitřních úhlů. Každé dva vrcholy určují stranu *n*-úhelníku, každé dvě strany *n*-úhelníku svírají vnitřní úhel.

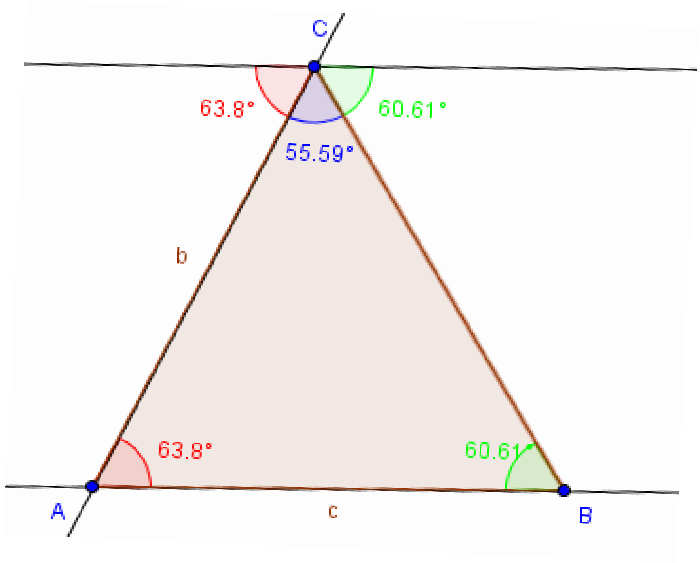
1.1 TROJÚHELNÍK

Trojúhelník je rovinný geometrický útvar určený průnikem tří polorovin. Na Obrázek 1 jsou to poloroviny *ABC, BCA, CAB*. V trojúhelník můžeme popsat tři vrcholy *A, B, C*, tři strany *AB, BC, CA* a tři vnitřní úhly *ABC, BCA, CAB*. Stranu může zapsat pomocí krajník bodů např. strana *AB* nebo pomocí malého písmene protějšího vrcholu např. *c*.



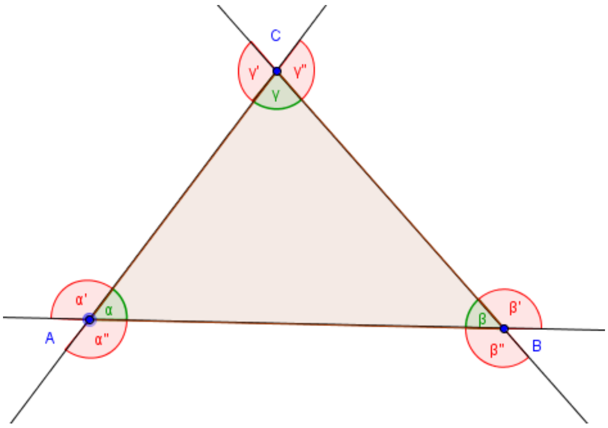
Obrázek 1 – trojúhelník

Každé dvě strany spolu svírají **vnitřní úhel** trojúhelníku. Součet všech vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180°. Na Obrázek 2 vedeme vrcholem *C* rovnoběžku se stranou *AB*. U vrcholu C doplníme střídavé úhly k úhlům α a β. Vidíme, že střídavé úhly spolu s úhlem γ tvoří přímý úhel, tudíž jejich součet dává 180°.



Obrázek 2 - součet vnitřních úhlů

Vnější úhly trojúhelníku, jsou vedlejší úhly k vnitřním úhlům. Jsou znázorněné na Obrázek 3 červenou barvou. Jejich velikost se vždy rovná součtu dvou vnitřních úhlů, které leží u jiných vrcholů než vnější úhel. K ověření můžeme použít Obrázek 2 a Obrázek 3.



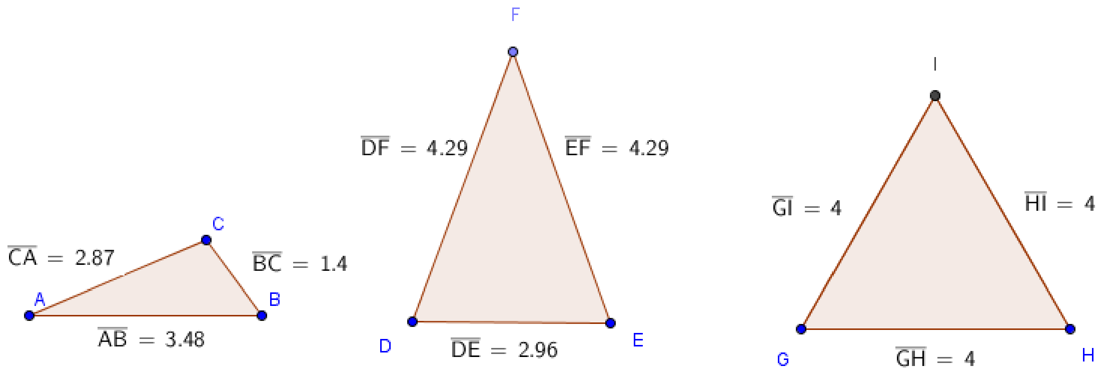
Obrázek 3 - vnitřní a vnější úhly

1.1.1 Rozdělení trojúhelníků

Trojúhelníky dělíme dvěma způsoby, buď podle délek jejich stran, anebo podle velikosti úhlů.

a) Rozdělení podle velikostí stran:

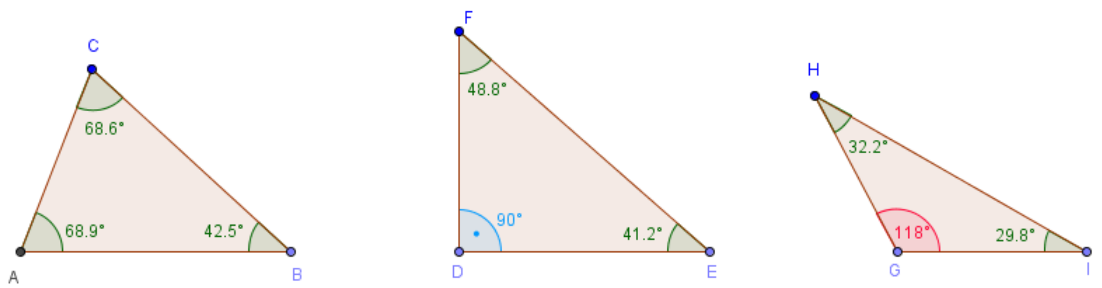
1. **Obecný trojúhelník** – má všechny strany nestejně dlouhé
2. **Rovnoramenný trojúhelník** – má dvě strany stejně dlouhé, které nazýváme **ramena** a jednu stranu jinak dlouhou kterou nazýváme **základna**
3. **Rovnostranný trojúhelník** – má všechny tři strany stejně dlouhé



Obrázek 4 - obecný, rovnoramenný a rovnostranný

b) rozdělení podle vnitřních úhlů:

1. **Ostroúhlý trojúhelník** – má všechny vnitřní úhly ostré
2. **Tupoúhlý trojúhelník** – má jeden vnitřní úhel tupý, zbývající dva jsou ostré
3. **Pravoúhlý trojúhelník** – má jeden vnitřní úhel pravý, zbývající dva jsou ostré
   - strana proti pravému úhlu se nazývá **přepona**, zbývající dvě se nazývají **odvěsny**

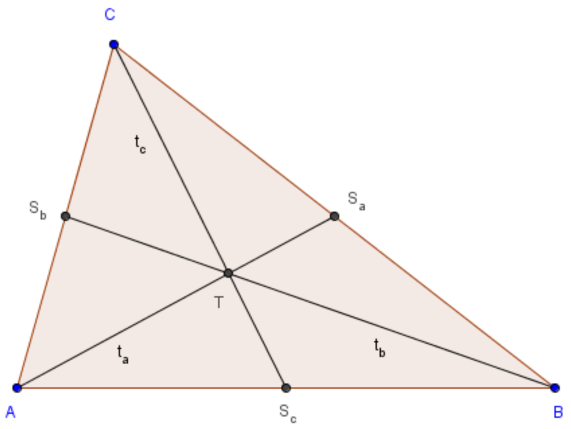


Obrázek 5 - ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý

1.1.2 Těžnice trojúhelníku

Definice: Úsečka spojující vrchol trojúhelníka se středem protější strany se nazývá **těžnice**.

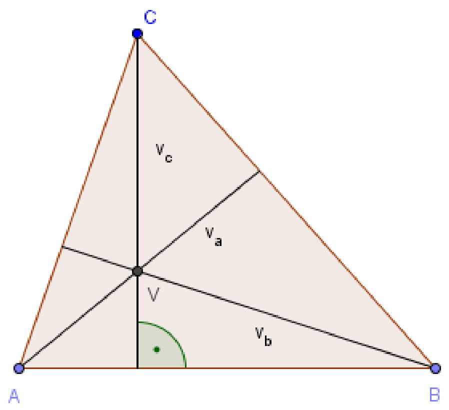
Těžnice se protínají v jednom společném bodě, který označujeme *T*. Tento bod se nazývá **těžiště** a nachází se vždy uvnitř trojúhelníku. Těžiště rozděluje každou těžnici v poměru 2:1, kde větší část těžnice se nachází mezi vrcholem a těžištěm.



Obrázek 6 - těžnice

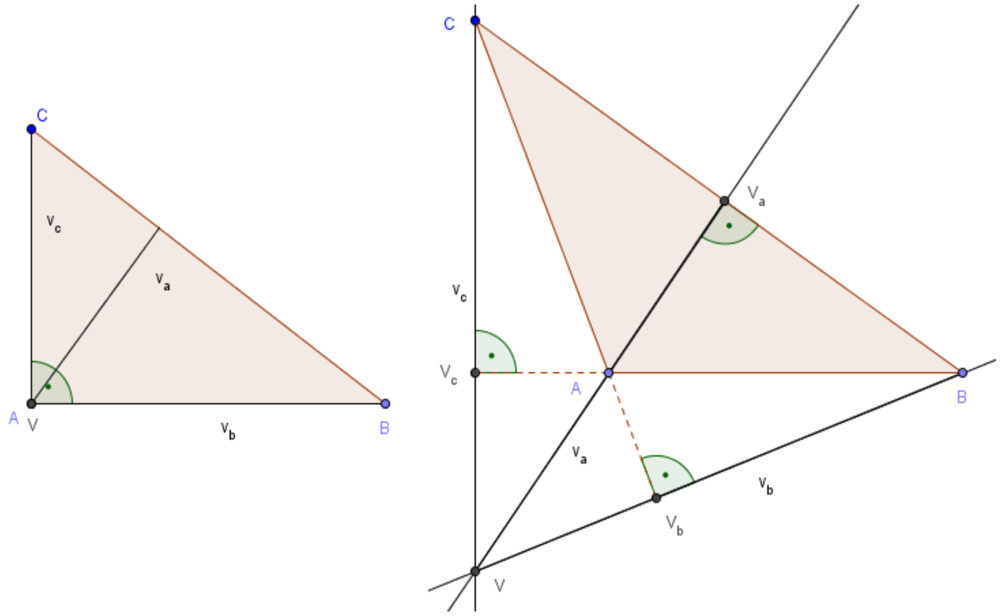
1.1.3 Výška trojúhelníku

Definice: Kolmice spuštěná z vrcholu trojúhelníku na protější stranu se nazývá **výška** trojúhelníku. Výška spuštěná z vrcholu *C*, je délka úsečky v_c .



Obrázek 7 - výška

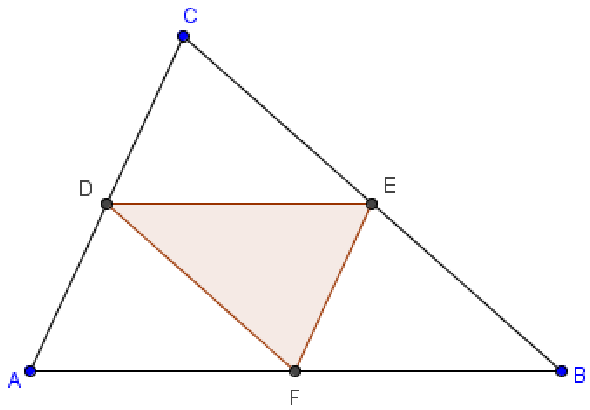
Průsečík výšek (ortocentrum) se v ostroúhlém trojúhelníku nachází uvnitř trojúhelníku. Pokud máme pravoúhlý trojúhelník, pak najdeme průsečík výšek ve vrcholu trojúhelníku, ve kterém se nachází pravý úhel. Pokud máme tupoúhlý trojúhelník, potom průsečík výšek najdeme vně trojúhelníku.



Obrázek 8 - výšky trojúhelníků

1.1.4 Střední příčky trojúhelníku

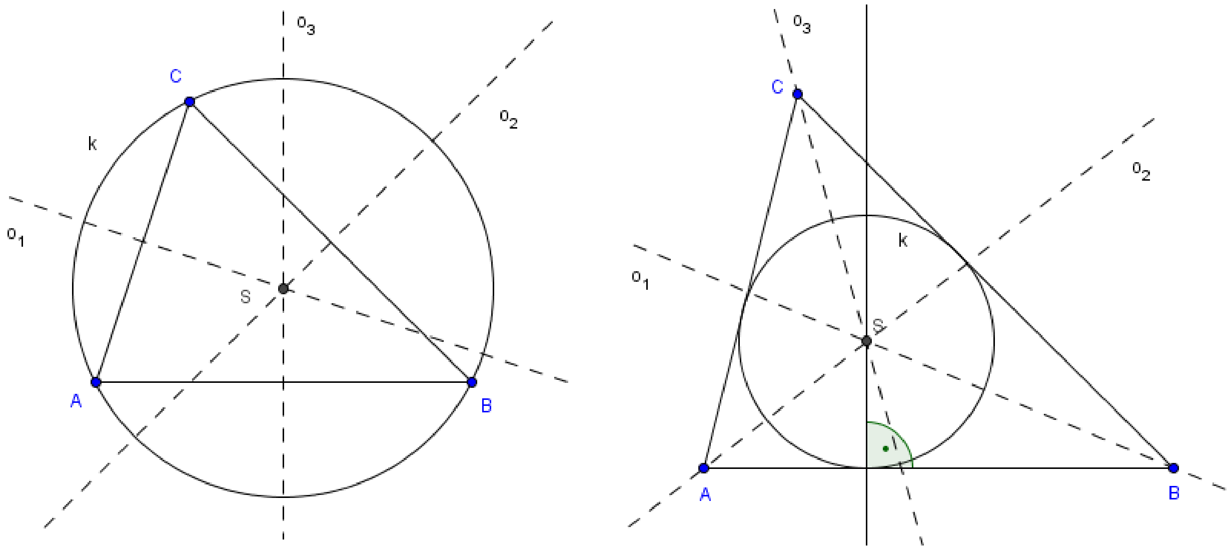
Střední příčka trojúhelníku je úsečka, která spojuje středy stran trojúhelníku a se zbylou stranou je rovnoběžná. Délka střední příčky je rovna polovině strany, s kterou je rovnoběžná. Střední příčky rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky.



Obrázek 9 - střední příčky

1.1.5 Kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

Pokud konstruujeme kružnici opsanou a kružnici vepsanou trojúhelníku, potom je pro nás nejdůležitější najít střed kružnice. Při konstrukci **kružnice opsané**, musíme nejprve narýsovat **osy stran** trojúhelníka. Jejich průsečík je středem kružnice opsané. Poloměr kružnice je vzdálenost získaného středu a vrcholu trojúhelníka. Pokud chceme zkonstruovat **kružnici vepsanou** trojúhelníku, potom musíme jako první narýsovat **osy vnitřních úhlů** trojúhelníku. Jejich průsečík je středem kružnice vepsané. Poloměr kružnice je vzdálenost získaného středu k patě kolmice spuštěné z tohoto středu na stranu trojúhelníka.



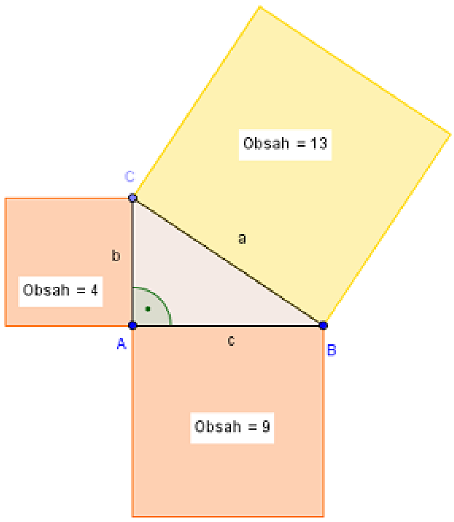
Obrázek 10 - kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku

1.1.6 Pythagorova věta

Pythagorova věta platí pouze v pravoúhlém trojúhelníku!

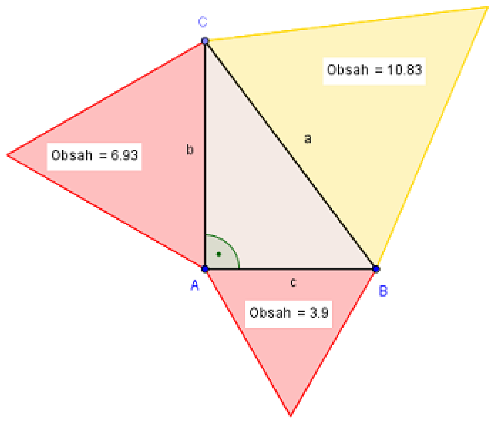
Věta: Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců nad jeho odvěsnami.

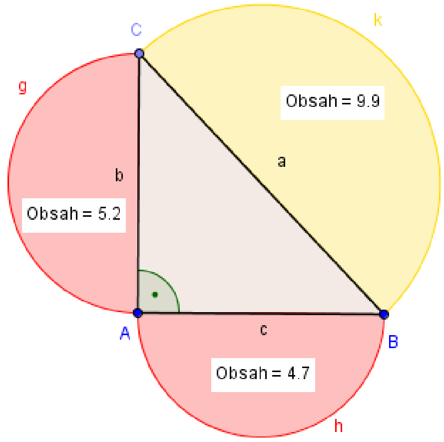
Obvykle se věta zapisuje vzorcem $c^2 = a^2 + b^2$, ale dejte si pozor, takto zapsaný vzoreček lze použít jen u trojúhelníku s pravým úhlem ve vrcholu *C*. Pravý úhel, ovšem může být i u jiného vrcholu, proto je důležité znát znění Pythagorovy věty a dokázat jí aplikovat i na trojúhelníky, které mají pravý úhel u jiného vrcholu než je vrchol *C*.



Obrázek 11 - Pythagorova věta

Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku můžeme sestrojit například půlkruhy nebo rovnostranné trojúhelníky.





Obrázek 12 - zobecněná Pythagorova věta

1.1.7 Sinová a Kosinová věta

Sinová věta: Poměr všech délek stran a hodnot sinů jim protilehlých úhlů je v trojúhelníku konstantní.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Využíváme, pokud chceme dopočítat zbylé strany trojúhelníku, ve kterém máme zadané dva úhly a jednu stranu nebo dopočítat zbylé úhly a máme zadané dvě strany a úhel který nesvírají.

Kosinová věta slouží k vypočítání úhlů v trojúhelníku, když máme zadané pouze strany nebo k vypočítání zbývající strany pokud máme zadané dvě strany a úhel jimi sevřený.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

2 Příklady

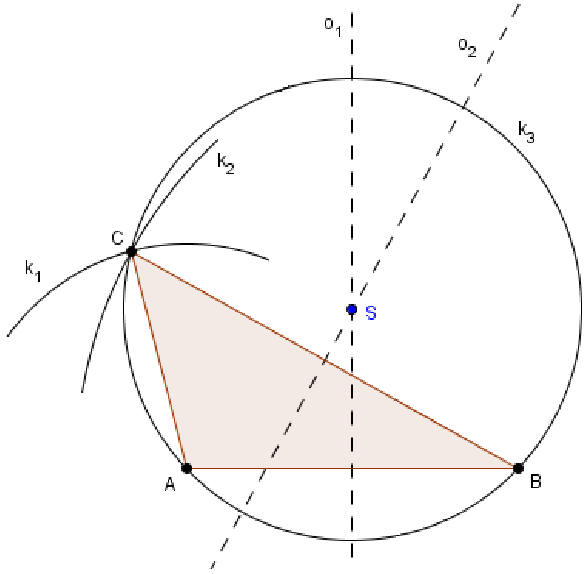
Vzorový: Maminka se stěhuje do města, ve kterém bydlí její tři dcery. Anička bydlí od Blanky *6km*. Blanka má k Cecilce o jednu třetinu větší vzdálenost než k Aničce. Vzdálenost mezi Aničkou a Cecilkou je poloviční, než vzdálenost mezi Cecilkou a Blankou. Narýsujte, kam by se měla maminka přestěhovat, tak aby měla ke každé ze svých dcer stejně daleko.

Rozbor: Bydliště Aničky, Blanky a Cecilky tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami $a = 8km$, $b = 4km$, $c = 6km$. Maminka by se měla přestěhovat do středu kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Tento střed nalezneme v průsečíku vnitřních os úhlů.

Postup konstrukce:

1. $AB; |AB| = 6cm$
2. $k_1; k_1(A;4cm)$
3. $k_2; k_2(B;8cm)$
4. $C; C \in k_1 \cap k_2$
5. $o_1; o_1 \perp AB \wedge |Ao_1| = |Bo_1|$
6. $o_2; o_2 \perp BC \wedge |Bo_2| = |Co_2|$
7. $S; S \in o_1 \cap o_2$
8. $k_3; k_3(S; r = |SA|)$

Grafické řešení:



Počet řešení: Úloha má jedno řešení

1. Zvolte si libovolné body A_1, B_1, C_1, které neleží v přímce. Sestrojte trojúhelník *ABC* tak, aby body A_1, B_1, C_1 byly středy jeho stran.

2. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *ABC,* kde $|AC| = |BC|$, je-li dáno: $|AC| = 6cm$, $r = 4cm$, kde *r* je poloměr kružnice opsané trojúhelníku.

3. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jestliže je dáno $c = 4{,}8cm$, $v_c = 4cm$, $t_c = 5{,}2cm$.

4. Sestrojte trojúhelník *CDE,* je-li dána strana *CD* délky $e = 8cm$, těžnice t_c délky $t_c = 8{,}5cm$ a úhel s vrcholem *D* o velikosti $\delta = 75°$. V trojúhelníku *CDE* sestrojte výšku v_c.

5. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jestliže je dána strana *BC* délky $a = 10cm$, výška $v_a = 5{,}5cm$ a úhel o velikosti $\gamma = 60°$.

6. Sestrojte trojúhelník *DEF*, jestliže je dána strana *EF* délky $d = 4cm$, strana *DF* délky $e = 6cm$ a výška $v_f = 3{,}5cm$.

7. Sestrojte trojúhelník *KLM*, jestliže je dáno $k = 5{,}5cm$, $t_k = 6{,}6cm$, $t_l = 5{,}1cm$.

8. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem u vrcholu *C*, je-li dáno $v_c = 2{,}4cm$ a $t_c = 3cm$.

9. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jestliže je dána strana $a = 4cm$, úhel $\alpha = 60°$ a rozdíl stran $b - a = 1cm$.

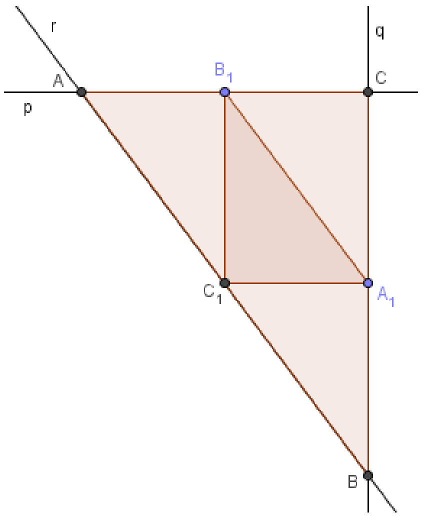
10. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$, $a + b + c = 13cm$.

11. Sestrojte obdélník *ABCD* se stranami délek $a = 5cm$, $b = 9cm$. Bod *P* je středem strany *BC*. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek *AB*, *AP* a strany *BC* obdélníku.

3 Řešení

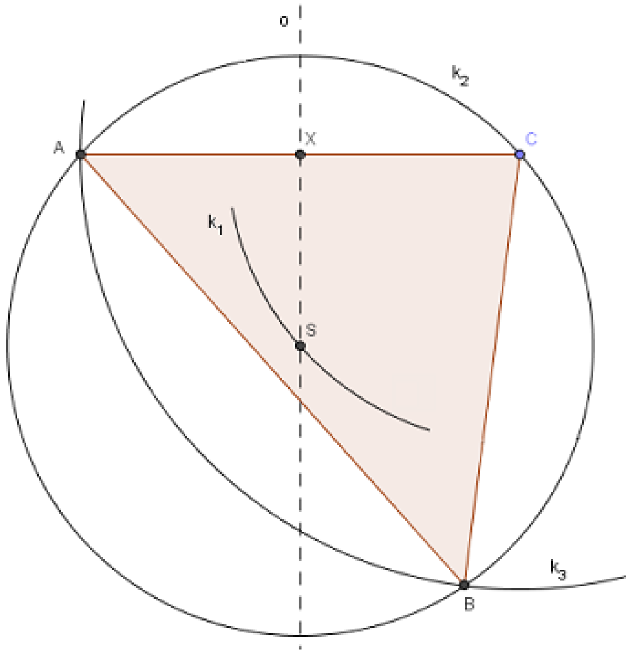
Příklad 1:

1. $\Delta A_1B_1C_1$
2. $p; p \parallel A_1C_1 \wedge B_1 \in p$
3. $q; q \parallel B_1C_1 \wedge A_1 \in q$
4. $r; r \parallel A_1B_1 \wedge C_1 \in r$
5. $A; A \in p \cap r$
6. $B; B \in q \cap r$
7. $C; C \in p \cap q$
8. ΔABC



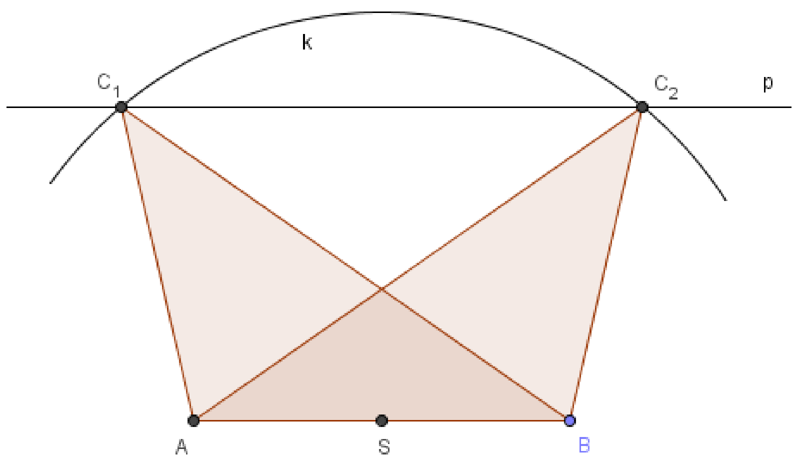
Příklad 2:

1. $AC; |AC| = 6cm$
2. $X; X \in AC \wedge |AX| = |CX|$
3. $o; o \perp AC \wedge X \in o$
4. $k_1; k_1(C;4cm)$
5. $S; S \in k_1 \cap o$
6. $k_2; k_2(S;4cm)$
7. $k_3; k_3(C;|AC|)$
8. $B; B \in k_2 \cap k_3$
9. ΔABC



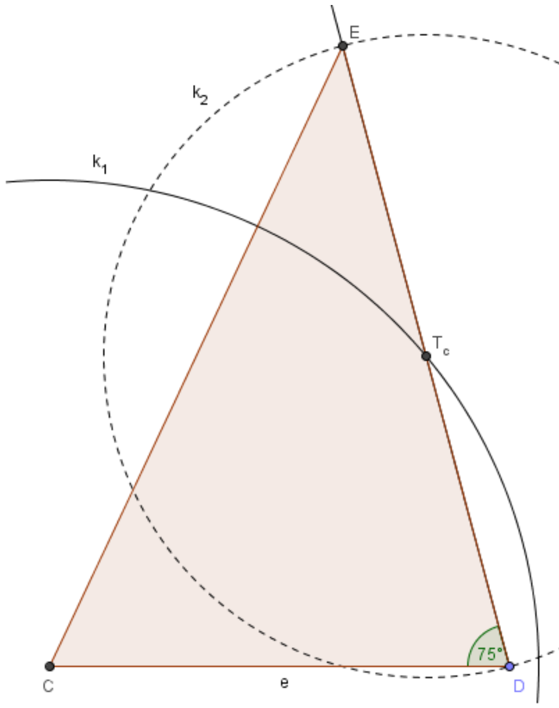
Příklad 3:

1. $AB; |AB| = 4{,}8cm$
2. $p; p \parallel AB \wedge |pAB| = 4cm$
3. $S; S \in AB \wedge |AS| = |BS|$
4. $k; k(S; 5{,}2cm)$
5. $C; C \in k \cap p$
6. ΔABC
7. úloha má dvě řešení



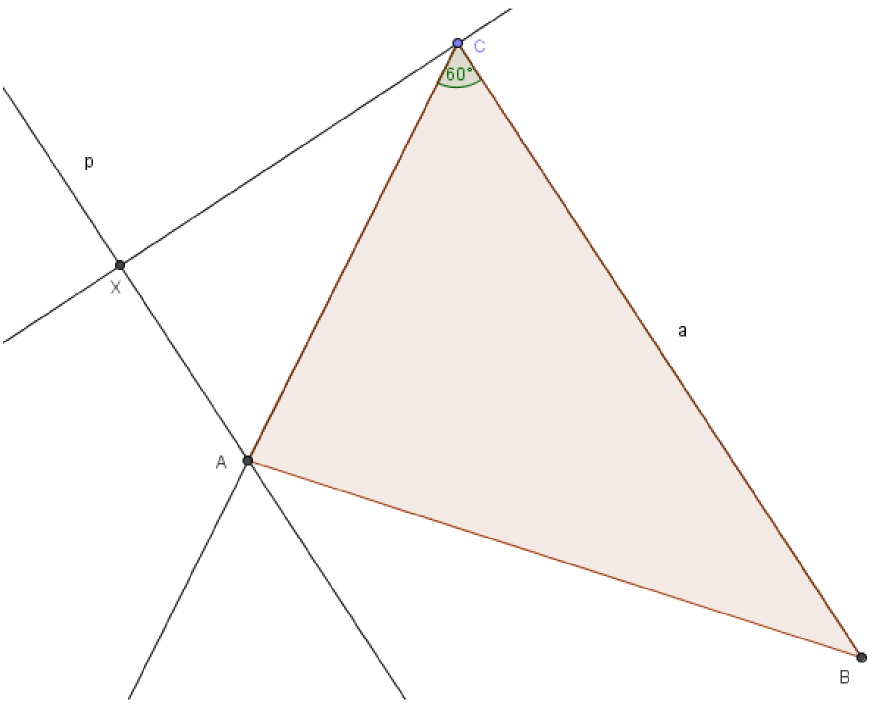
Příklad 4:

1. $CD; |CD| = 8cm$
2. $\angle CDE'; |\angle CDE'| = 75°$
3. $k_1; k_1(C; 8,5cm)$
4. $T_c; T_c \in k_1 \cap DE'$
5. $k_2; k_2(T_C; |T_C D|)$
6. $E; E \in k_2 \cap DE'$
7. ΔCDE



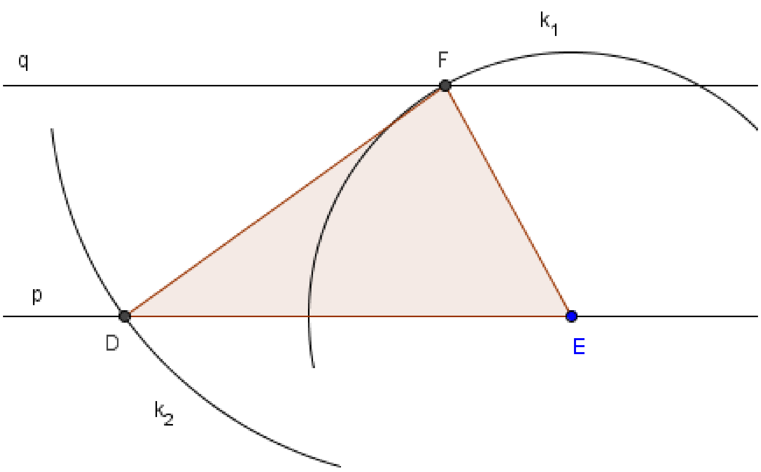
Příklad 5:

1. $BC; |BC| = 10cm$
2. $p; p \parallel BC \wedge |pBC| = 5,5cm$
3. $\angle BCA'; |\angle BCA'| = 60°$
4. $A; A \in p \cap CA'$
5. ΔABC



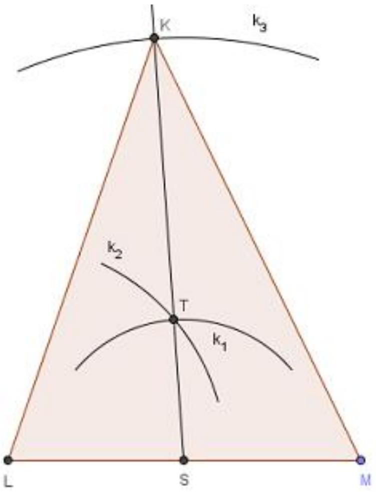
Příklad 6:

1. $\leftrightarrow p$
2. $E; E \in p$
3. $q; q \parallel p \wedge |pq| = 3{,}5cm$
4. $k_1; k_1(E; 4cm)$
5. $F; F \in q \cap k_1$
6. $k_2; k_2(F; 6cm)$
7. $D; D \in p \cap k_2$
8. ΔDEF



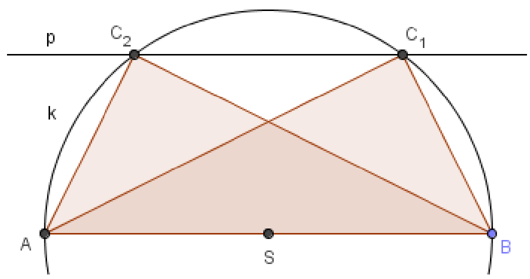
Příklad 7:

1. $LM;|LM| = 5,5cm$
2. $S; S \in LM \wedge |LS| = |MS|$
3. $k_1; k_1(S;2,2cm)$
4. $k_2; k_2(L;3,4cm)$
5. $T; T \in k_1 \cap k_2$
6. $k_3; k_3(S;6,6cm)$
7. $K; K \in k_3 \cap ST$
8. ΔKLM



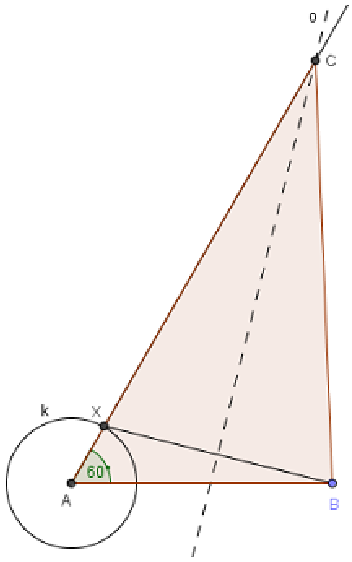
Příklad 8:

1. $AB;|AB| = 2.r$
2. $S; S \in AB \wedge |AS| = |BS|$
3. $k; k(S;3cm)$
4. $p; p \parallel AB \wedge |pAB| = 2,4cm$
5. $C; C \in k \cap p$
6. ΔABC



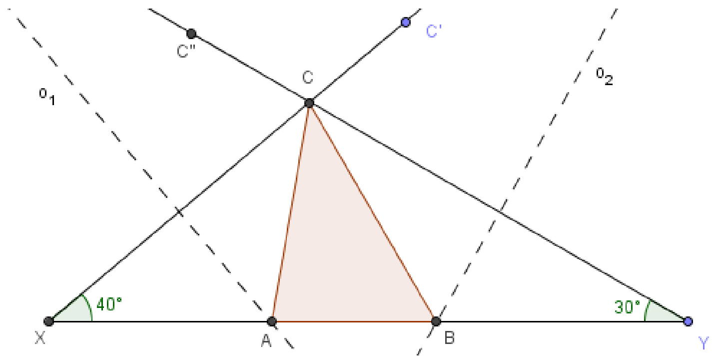
Příklad 9:

1. $AB; |AB| = 4cm$
2. $\angle BAC'; |\angle BAC'| = 60°$
3. $k; k(A;1cm)$
4. $X; X \in AC' \cap k$
5. $S; S \in XB \wedge |XS| = |BS|$
6. $o; o \perp XB \wedge S \in o$
7. $C; C \in o \cap AC'$
8. ΔABC



Příklad 10:

1. $XY; |XY| = 13cm$
2. $\angle YXC'; |\angle YXC'| = 40°$
3. $\angle XYC''; |\angle XYC''| = 30°$
4. $C; C \in XC' \cap YC''$
5. $o_1; o_1 \perp XC \wedge |o_1 X| = |o_1 C|$
6. $o_2; o_2 \perp YC \wedge |o_2 Y| = |o_2 C|$
7. $A; A \in o_1 \cap XY$
8. $B; B \in o_2 \cap XY$
9. ΔABC



Příklad 11:

1. $ABCD$
2. $P; P \in BC \wedge |BP| = |CP|$
3. $o_1; o_1$ osa $\angle BAP$
4. $o_2; o_2$ osa $\angle APB$
5. $S; S \in o_1 \cap o_2$
6. $h; h \parallel BP \wedge S \in h$
7. $F; F \in h \cap AB$
8. $k; k(S; |SF|)$